MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 1
23.10.2019

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Wir definieren zuerst die Abkürzungen

F : „Jemand tritt im Zirkus *In Flagranti* auf.“,
T : „Jemand hat Talent.“,
E : „Jemand erfindet sich immer wieder neu.“,
B : „Jemand begeistert sein Publikum.“,
W : „Jemand ist ein wahrer Künstler.“

Mit diesen Abkürzungen können wir die Aussagen wie folgt formalisieren:

- Wenn jemand sich immer wieder neu erfindet, dann hat er Talent: $E \Longrightarrow T$
- Wer die Zuschauer nicht begeistern kann, ist kein wahrer Künstler: $\neg B \Longrightarrow \neg W$
- Jemand, der sich nicht immer wieder neu erfindet, kann die Zuschauer nicht begeistern: $\neg E \Longrightarrow \neg B$
- Nur ein wahrer Künstler darf im Zirkus *In Flagranti* auftreten: $F \Longrightarrow W$

Um die Aussagen zu vereinfachen, benutzen wir, daß $\neg B \Longrightarrow \neg W$ zu $W \Longrightarrow B$ äquivalent ist (Wenn jemand ein wahrer Künstler ist, dann kann er die Zuschauer begeistern), denn nach 1.6 e) der Vorlesung ist

$$(W \Longrightarrow B) \iff (\neg B \Longrightarrow \neg W)$$

eine Tautologie. Ganz genauso ist

$$\neg E \Longrightarrow \neg B$$

äquivalent zu

$$B \Longrightarrow E.$$

Damit sehen wir, daß sich eine Kette von Implikationen ergibt:

$$F \Longrightarrow W \Longrightarrow B \Longrightarrow E \Longrightarrow T$$

Jemand, der im Zirkus *In Flagranti* auftritt, muß also notwendigerweise alle vier genannten Eigenschaften besitzen.

2. a) Betrachten wir die Wahrheitstafeln,

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

so sehen wir, daß die Aussagen $\neg(A \vee B)$ und $\neg A \wedge \neg B$ unabhängig davon, ob A und B wahr oder falsch sind, immer denselben Wahrheitswert besitzen, also äquivalent sind.

b) In diesem Fall stellen wir folgende Wahrheitstafel auf:

A	B	$A \iff B$	$\neg(A \iff B)$	$\neg B$	$A \iff \neg B$	$\neg A$	$\neg A \iff B$
w	w	w	f	f	f	f	f
w	f	f	w	w	w	f	w
f	w	f	w	f	w	w	w
f	f	w	f	w	f	w	f

Die drei Aussagen $\neg(A \iff B)$ und $A \iff \neg B$ und $\neg A \iff B$ haben also auch immer denselben Wahrheitswert, womit sie äquivalent sind.

3. Wir setzen an die Stelle des Fragezeichens die Aussage $\neg Q$, und untersuchen, ob

$$(P \implies Q \vee R) \quad \iff \quad ((\neg Q \wedge P) \implies R)$$

eine Tautologie ist, indem wir die zugehäorige Wahrheitstafel aufstellen:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \implies Q \vee R$	$\neg Q \wedge P$	$(\neg Q \wedge P) \implies R$	... $\iff$ ...
w	w	w	w	w	f	w	w
w	w	f	w	w	f	w	w
w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w	f	w
f	w	w	w	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	f	w	w
f	f	f	f	w	f	w	w

Die Aussage

$$(P \implies Q \vee R) \quad \iff \quad ((\neg Q \wedge P) \implies R)$$

ist also, unabhängig von den Wahrheitswerten von P, Q und R stets wahr, also eine Tautologie.

Setzen wir stattdessen an die Stelle des Fragezeichens die Aussage Q, so hat die Aussage

$$(P \implies Q \vee R) \quad \iff \quad ((Q \wedge P) \implies R)$$

die Wahrheitstafel

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \implies Q \vee R$	$Q \wedge P$	$(Q \wedge P) \implies R$	... $\iff$ ...
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	f
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	w	f
f	w	w	w	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	f	w	w
f	f	f	f	w	f	w	w

Die Äquivalenzaussage ist also falsch, wenn P wahr und R falsch ist; damit ist sie keine Tautologie.

4. Wir stellen die entsprechende Wahrheitstafel auf, im ersten Fall haben wir:

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge Q$	$((P \Longrightarrow Q) \wedge Q) \Longrightarrow P$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	w	f	w

Falls P falsch und Q wahr ist (3. Zeile), ist die Aussage $((P \Longrightarrow Q) \wedge Q) \Longrightarrow P$ falsch, sie ist also nicht allgemeingültig!
Fur die zweite Aussage sieht die Wahrheitstafel wie folgt aus:

P	Q	$\neg Q$	$P \Longrightarrow Q$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge \neg Q$	$((P \Longrightarrow Q) \wedge \neg Q) \Longrightarrow \neg P$
w	w	f	w	f	w
w	f	w	f	f	w
f	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w

Offenbar ist die Aussage $((P \Longrightarrow Q) \wedge \neg Q) \Longrightarrow \neg P$ immer wahr, also allgemeingültig (eine Tautologie)!
Hier ist noch ein anderer Weg, um sich das klarzumachen. Wir wissen nach 1.6 e) der Vorlesung schon, daß folgende Aussage immer wahr ist:

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$$

Damit können wir die Aussage $((P \Longrightarrow Q) \wedge \neg Q) \Longrightarrow \neg P$ umschreiben als

$$((\neg Q \Longrightarrow \neg P) \wedge \neg Q) \Longrightarrow \neg P,$$

und dies ist nach 1.6 d) (ersetze dort P durch $\neg Q$ und Q durch $\neg P$) eine Tautologie.